Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2018/2019**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Anneaux - TD 2

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}_n$ des classes d'équivalence de résidu modulo n est un anneau commutatif.

2. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est un anneau non-commutatif.

3. Si R_1, R_2 sont des anneaux, montrer qu'il existe une structure d'anneau sur $R_1 \times R_2$.

4. Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Posons
$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) := (ac, bd)$ et $(a, b) \times (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$.
Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ sont des anneaux. De plus, $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un corps.

5. Si S_1, S_2 sont des sous-anneaux d'un anneau R, montrer que $S_1 \cap S_2$ est aussi un sous-anneau de R.

6. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

7. Montrer que l'ensemble $S = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

8. Montrer que l'ensemble $S = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

9. Montrer que l'ensemble $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-anneau de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

10. Montrer que l'ensemble $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-anneau de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

11. Montrer que l'ensemble $S = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(0) = 0\}$ n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{C}[x]$.